ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΙΟΥΝΙΟΣ 27 , 2017

1. Έστω $\mathfrak{c}(s)$ κανονική καμπύλη με s να είναι παράμετρος μήκους τόξου και έστω $\vec{\eta}(s)$ το κάθετο διάνυσμα. Ορίζουμε καμπύλη $\widetilde{\mathfrak{c}}(s)$ ως εξής

$$\widetilde{\mathfrak{c}}(s) = \int_{s_0}^{s} \vec{\eta}(u)\,\mathrm{d}u$$

(α΄) Δείξατε ότι η $\widetilde{\mathfrak{c}}$ είναι κανονική και να βρείτε το μήκος τόξου , τη καμπυλότητα καθώς και τη στρέψη.

(β΄) Δείξατε ότι η $\widetilde{\mathfrak{c}}$ είναι επίπεδη αν και μόνο αν η $\mathfrak{c}$ είναι σταθερής κλίσης. Επιπλέον δείξατε ότι η $\widetilde{\mathfrak{c}}$ είναι τμήμα κύκλου αν και μόνο αν η $\mathfrak{c}$ είναι τμήμα κύκλου ή κυλινδρική έλικα.

2. (α΄) Δείξατε ότι

$$K\eta\left(\dot{c}(s)\right) = \langle N \circ c(s), \ddot{c}(s)\rangle$$

(β΄) Δείξατε ότι αν από ένα σημείο περνάνε τρεις διακεκριμένες ευθείες τότε αυτό είναι ισόπεδο.

(γ΄) Δείξατε ότι αν μία επιφάνεια είναι ευθειογενής τότε έχει πάντα $K_G \leq 0$.

3. Θεωρούμε την επιφάνεια

$$\mathbb{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}$$

(α΄) Να βρεθεί η απεικόνιση Gauss και να περιγραφεί η εικόνα της.

(β΄) Είναι αναπτυκτή ;

(γ΄) Να βρεθούν τα ομφαλικά σημεία .

(δ΄) Να δειχθεί ότι η τομή της $\mathbb{S}$ με επίπεδα παράλληλα στον Oxy είναι γραμμές καμπυλότητας.

4. Έστω $\mathfrak{c}(s)$ κανονική καμπύλη με s παράμετρο το μήκος τόξου , $k(s) > 0$ και $\tau(s) > 0$. Ας είναι και $v \in (0, +\infty)$. Ορίζουμε την επιφάνεια

$$X(s, v) = c(s) + v\vec{\eta}(s)$$

(α΄) Να δειχθεί ότι η επιφάνεια είναι κανονική. Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή καθώς και η καμπυλότητα Gauss .

(β΄) Να δειχθεί ότι αν η $\mathfrak{c}(s)$ είναι επίπεδη τότε η επιφάνεια είναι παραβολική ή ισόπεδη.